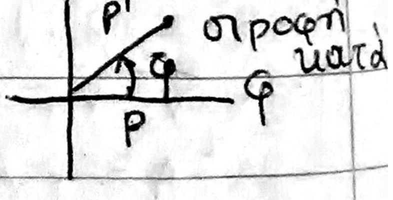
ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^n)$ ΜΕ
ΣΥΝΗΘΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ
(ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ: ΜΕΛΕΤΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ 2×2, $3\times n$ $(n\times n)$
ΠΙΝΑΚΩΝ). Θεώρημα Euler $\to \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

ΕΡΩΤΗΜΑ. Για την περίπτωση $n=2$, έστω $\mathbb{R}^2$ με συνήθες εσωτ. γινόμενο $e=(e_1=(1,0), e_2=(0,1))$ η κανονική βάση. Ποιες γραμμικές $T: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικές ισομετρίες;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Στροφές ως προς την αρχή των αξόνων (αυτές έχουν $\det T=1$), Αναклάσεις ως προς ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων (αυτές έχουν $\det T=-1$) και μόνο αυτές (έχουν $\det T=-1$).

$\Rightarrow$ Θέτουμε $A=[T]^e_e$. Τότε $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ ορθογώνιος (και ξέρουμε ότι $\det T=\det A$)

Περίπτωση 1: $\det A=1$. Έστω $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$. Αφού A ορθογώνιος, οι γραμμές του A είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$. Άρα:



$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases} \Rightarrow \text{υπάρχει } \varphi\in[0,\pi]$$

γιατί $a^2+b^2=1 \Rightarrow (a,b)$ είναι στο μοναδιαίο κύκλο

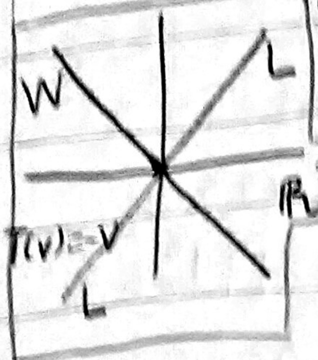
ώστε: $A=\begin{bmatrix} \text{συν}\varphi & -\text{ημ}\varphi \\ \text{ημ}\varphi & \text{συν}\varphi \end{bmatrix}$ $\quad A=\begin{bmatrix} \text{συν}\varphi & \text{ημ}\varphi \\ -\text{ημ}\varphi & \text{συν}\varphi \end{bmatrix}$

Η στροφή στο $\mathbb{R}^2$ με φορά αντιστρ. της φοράς των δεικτ. ρολ. κατά φ. $\quad$ ενώ αυτή με φορά σύμφωνη

Περίπτωση 2: $n=2$, $\det T=\det A=-1$.

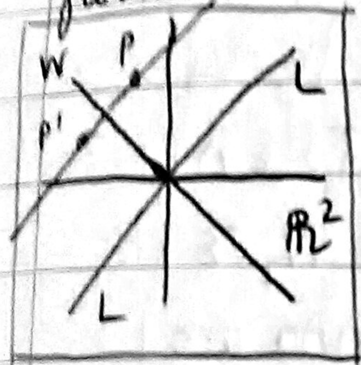
Τότε, θέτουμε $W=V_A(1)$, $L=V_A(-1)$

Έχουμε $\dim_{\mathbb{R}} W=\dim_{\mathbb{R}} V=1$ και αφού A ορθογώνιος



- Αφού $W=V_A(1) \Rightarrow$ Αν $w\in W$ τότε $Aw=T(w)=w$. Δηλ. η T δεν μετακινεί τα σημεία του W.
- Αφού $L=V_A(-1) \Rightarrow$ Αν $v\in V$, τότε $T(v)=-v$

Επειδή T γραμμική, έχουμε ότι T είναι η ορθογώνια ανάκλαση ως προς την ευθεία $W=V_A(1)$.



Δηλαδή αν $P\in\mathbb{R}^2$ το $P'=T(P)$ καθορίζεται μοναδικά από τα εξής: Η ευθεία που ενώνει τα P και P' είναι παράλληλη με την L (ισοδύναμα κάθετη με την W) και αν $P\notin W$ τα P, P' είναι στα αντίθετα ημιεπίπεδα που ορίζει η W και σε ίσες αποστάσεις από την W.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω e_1 ορθοκανονική βάση του W, e_2 ορθοκανονική βάση του L. Θέτουμε $\tilde{P}=[e_1|e_2]$. Τότε $\tilde{P}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ ορθογ. και $\tilde{P}^{-1}A\tilde{P}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ A: 1 με πολλαπλότητα 1

-1 με πολλαπλότητα 1

Άρα, αν $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ γραμμική ισομ. τότε
- T στροφή αν $\det T=1$
- T ορθογώνια ανάκλαση ως προς 1-διάστατο υπόχωρο αν $\det T=-1$

⇨ Για $n=3$: 1) $T = id_{\mathbb{R}^3}$

2) $T \neq id_{\mathbb{R}^3}$, $\det T = 1$

3) $T = -id_{\mathbb{R}^3} \rightsquigarrow (x,y,z) \mapsto (-x,-y,-z)$

4) $T \neq -id_{\mathbb{R}^3}$, $\det T = -1$

⇨ $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γραμμική ισομετρία. $e = (e_1 = (1,0,0), e_3 = (0,0,1))$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^3$, $A = [T]_e^e \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ορθογώνιος. Διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις:

i) $T = id_{\mathbb{R}^3}$ (άρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$)

Ο T δε μετακινεί τίποτα.

ii) $T \neq id_{\mathbb{R}^3}$ και $\det T = 1$. Θέτουμε $W = V_A(1)$, $L = W^{\perp}$. Έχουμε $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} L = 2$. Τότε η T είναι:

ορθογώνιο συμπλήρωμα

Περιστροφή, με άξονα περιστροφής W, σε επίπεδα κάθετα στο W (δηλ. παράλληλα στο L) με κοινή γωνία περιστροφής φ.

ΕΡΩΤΗΜΑ Πώς βρίσκουμε το συνφ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ $\boxed{1 + 2\text{συν}\varphi = \text{tr}A = \text{tr}T}$

ίχνος του πίνακα A

Έστω e_1 ορθοκανονική βάση του W, και e_2, e_3 ορθοκανονική βάση του L. Θέτουμε $\tilde{P} = [e_1 | e_2 | e_3] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Τότε (1) $\tilde{P}^{-1} A \tilde{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{συν}\varphi & -\text{ημ}\varphi \\ 0 & \text{ημ}\varphi & \text{συν}\varphi \end{bmatrix}$ ή $\tilde{P}^{-1} A \tilde{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{συν}\varphi & \text{ημ}\varphi \\ 0 & -\text{ημ}\varphi & \text{συν}\varphi \end{bmatrix}$

Από την (1) $\Rightarrow \text{Tr}(\tilde{P}^{-1} A \tilde{P}) \overset{!}{=} 1 + 2\text{συν}\varphi$

Αλλά, όμοιοι πίνακες έχουν ίδιο ίχνος. Άρα:
$TrA = Tr(\tilde{P}^{-1}A\tilde{P}) = 1 + 2\cos\varphi$.

iii) $T = -id_{\mathbb{R}^3}$ (άρα $A = -I_3$). Τότε $T((x,y,z)) = (-x,-y,-z)$ άρα T ανάκλαση ως προς την αρχή των αξόνων.

iv) $T \neq -id_{\mathbb{R}^3}$ και $\det T = -1$. Θέτουμε $W = V_A(-1)$, $L = W^{\perp}$. Υπάρχει γωνία φ με $\boxed{-1 + 2\sigma\upsilon\nu\varphi = trA}$

Τότε, η T πρώτα περιστροφή κατά γωνία φ σε κάθε επίπεδο κάθετο με το W (δηλ. παράλληλο με το ~~W~~ L) και μετά ορθογώνιος κατοπτρισμός ως προς το επίπεδο L. (Φυσικά, αν κάναμε πρώτα κατοπτρισμό και μετά στροφή θα ήταν το ίδιο)

Έστω e_1 ορθοκανονική βάση του W, e_2 και e_3 ορθοκανονική βάση του L. Θέτουμε:
$\tilde{P} = [e_1|e_2|e_3] \in \mathbb{R}^{3\times3}$ ορθογώνιος. Τότε:
$$\tilde{P}^{-1}A\tilde{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma\upsilon\nu\varphi & -\eta\mu\varphi \\ 0 & \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi \end{bmatrix} \text{ ή } \tilde{P}^{-1}A\tilde{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma\upsilon\nu\varphi & \eta\mu\varphi \\ 0 & -\eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi \end{bmatrix}$$

Θεώρημα Euler (για $n=3$). Αν $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γραμμική ισομετρία (ή $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ ορθογώνιος) έχουμε μία από τις παραπάνω (4) περιπτώσεις.

Με όρους πινάκων (*)

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $n \geq 2$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος. Τότε υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος ώστε

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_q \end{bmatrix} \quad (1)$$

όπου κάθε B_i είναι 1×1 ή 2×2. Αν B_i είναι 1×1, τότε $B_i=[1]$ ή $B=[-1]$. Αν B_i 2×2, τότε υπάρχει $\varphi_i \in \mathbb{R}$ με:

$$B_i = \begin{bmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{bmatrix}$$

Με όρους (**) γραμμικών απεικονίσεων

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $\mathbb{R}^n$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ γραμμική ισομετρία. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση g του $\mathbb{R}^n$ (όχι αναγκαστικά η κανονική) ώστε:

$$[T]_g^g = \begin{bmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_q \end{bmatrix} \quad (1) \; \text{-----}$$

ώστε...

** Αν $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ τότε B ορθογώνιος, $\det B = -1$. Αφού $B \neq -I_3$ είμαστε στην περίπτωση (ii) δηλ. συνδυασμός στροφής κατά φ και ανάκλασης. Πώς βρίσκουμε $\text{συν}\varphi$;

Απάντηση: $-1 + 2\,\text{συν}\varphi = \text{tr}A = -1 \Rightarrow \text{συν}\varphi = 0$

Πώς βρίσκουμε το W;

Απάντηση: $W = V_A(-1)$ και πράξεις.

ΦΥΛΛΑΔΙΟ #6, ΑΣΚΗΣΗ 4.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ΛΥΣΗ. Αφού οι στήλες A αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$ (με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, έχουμε ότι ο A είναι ορθογώνιος

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Αφού $A \neq I_3$ είμαστε στην περίπτωση ii)
Επομένως, από το Θ. Euler ο A :
παριστάνει στροφή κατά γωνία φ περί ενός άξονα $\mathcal{E}$ που περνάει από το σημείο $O=(0,0,0)$
Προσδιορισμός άξονα ε & συνημιτόνου της φ:
Από τα προηγούμενα, $1+2\text{συνφ} = \text{tr}A = -1 \Rightarrow$
(δηλαδή το άθροισμα των διαγωνίων είναι -1)
$\boxed{\text{συνφ} = -1}$ (αν θέλαμε φ=5)
Επίσης, ο άξονας $\mathcal{E} = V_A(1) =$
= ιδιόχωρος του A με ιδιοτιμή 1.
Υπολογισμός $V_A(1)$. Μετά τις πράξεις,
$$V_A(1) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

ΑΣΚΗΣΗ

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

• Ελέγχουμε αν ο A είναι ορθογώνιος

$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{9}{12}=1$ και ομοίως

για τη 2η στήλη και προφανώς 1η και 2η στήλη κάθετες. Άρα ΝΑΙ, είναι ορθογώνιος.

Από Θεώρημα Euler, (για $n=2$) A στροφή ή ορθογώνια ανάκλαση (ως προς 1-διάστατο υπόχωρο. Τι απο τα δύο συμβαίνει; Έχουμε $\det A=-1$. Άρα A παριστάνει ορθογώνια ανάκλαση ως προς το 1-διάστατο υπόχωρο $V_A(1)$. Μετά τις πράξεις $V_A(1)=$

$$=\left\{\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}}y \\ y \end{bmatrix}, y\in\mathbb{R}\right\}$$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΣ. Τ.Α.Ε.Ι:

i) A ΘΕΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΕΝΟΣ

ii) ΚΑΘΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΙΜΗ ΤΟΥ $A > 0$ (ή < 0)

iii) $\det B_i > 0$ $\forall i$ με $1 \leq i \leq n$ ΟΠΟΥ B_i Ο $i \times i$ ΥΠΟΠΙΝΑΚΑΣ ΚΡΑΤΩΝΤΑΣ ΤΙΣ i ΠΡΩΤΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΚΑΙ ΣΤΗΛΕΣ ΤΟΥ A.

($\det B_1 < 0$, $\det B_2 > 0$, $\det B_3 < 0$, $\det B_4 > 0$ ..
κτλ. $(-1)^i \det B_i > 0$ για κάθε $1 \leq i \leq n$)

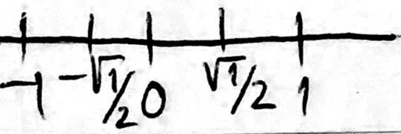
iv) $x^t A x > 0$ ΓΙΑ ΚΑΘΕ $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟ. (αντιστ. $x^t A x < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ μη μηδενικό)

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογίσετε $a \in \mathbb{R}$ ώστε ο συμμετρικός πίνακας: $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ να είναι θετικά ορισμένος.

Χρησιμοποιούμε το iii). Έχουμε $B_1 = [1]$, άρα $\det B_1 = 1 > 0$, $\cancel{B_2 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}}$ $\det B_2 = 1 - a^2$.

Πρέπει $\det B_2 > 0$, άρα $-1 < a < 1$ (1)



, $B_3 = A$, $\det A = 1 - 2a^2$ ← ΜΕΤΑ ΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Άρα $\det B_3 > 0 \iff -\sqrt{\frac{1}{2}} < a < \sqrt{\frac{1}{2}}$ (2)

Άρα, τελικά Α θετικά φορτισμένος $\iff$ η (2) ισχύει